



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 17 februarie 2024

Clasa a V-a soluții și bareme

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător!**

### Problema 1

Demonstrați că numărul  $a = 11^{101} + 22^{102} + 33^{103} + \dots + 99^{109}$  nu este pătrat perfect.

$$\begin{aligned}
 u(11^{101}) &= 1 \dots\dots\dots 2p \\
 u(22^{102}) &= u[(2)^{102}] = u(2^2) = 4, \\
 u(33^{103}) &= u[(3)^{103}] = u(3^3) = 7, \\
 u(44^{104}) &= u[(4)^{104}] = u(4^2) = 6, \\
 u(55^{105}) &= u[(5)^{105}] = 5, \\
 u(66^{106}) &= u[(6)^{106}] = 6, \\
 u(77^{107}) &= u[(7)^{107}] = u(7^3) = 3, \\
 u(88^{108}) &= u[(8)^{108}] = u(8^4) = 6, \\
 u(99^{109}) &= u[(9)^{109}] = u(9^1) = 9 \dots\dots\dots 3p
 \end{aligned}$$

Deci  $u(a) = u(1 + 4 + 7 + 6 + 5 + 6 + 3 + 6 + 9) \Rightarrow a$  nu este pătrat perfect. .... 2p

### Problema 2

Determinați suma cifrelor numărului  $M$ , unde  $M = 313 \cdot 8^{313} \cdot 5^{940} - 131$ .

$$\begin{aligned}
 M &= 313 \cdot 5 \cdot 2^{939} \cdot 5^{939} - 131 = \dots\dots\dots 2p \\
 &= 1565 \cdot 10^{939} - 131 = 1565 \underbrace{0000 \dots 0}_{0 \text{ de } 939 \text{ de ori}} - 131 = \dots\dots\dots 2p \\
 &= 1564 \underbrace{99 \dots 9}_{9 \text{ de } 936 \text{ de ori}} 869, \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

Suma cifrelor lui  $M$  este  $1 + 5 + 6 + 4 + 9 \cdot 936 + 8 + 6 + 9 = 8463$ .....2p



### Problema 3

- a) Scrieți numărul  $91^{91}$  sub forma  $x^2 + y^3$  unde  $x$  și  $y$  sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2.

**GM6-7-8/2023**

- b) Demonstrați că numărul  $A = 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{2025}$  se divide cu 146.

**SGM11/2023**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 91^{91} &= 91^{90} \cdot 91 = 91^{90} \cdot (64 + 27) = 91^{90} \cdot 64 + 91^{90} \cdot 27 = \dots\dots\dots 1\text{p} \\ &= 91^{45 \cdot 2} \cdot 8^2 + 91^{30 \cdot 3} \cdot 3^3 = \dots\dots\dots 1\text{p} \\ &= (91^{45} \cdot 8)^2 + (91^{30} \cdot 3)^3 \dots\dots\dots 1\text{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A &= 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{2025} = \\ &= (8 + 8^2 + 8^3) + (8^4 + 8^5 + 8^6) + \dots + (8^{2023} + 8^{2024} + 8^{2025}) = \\ &= \underbrace{(8 + 8^2 + 8^3)}_{=146 \cdot 4} + 8^3(8 + 8^2 + 8^3) + \dots + 8^{2022}(8 + 8^2 + 8^3) = \dots\dots\dots 2\text{p} \\ &= (8 + 8^2 + 8^3)(1 + 8^3 + \dots + 8^{2022}) = 146 \cdot 4(1 + 8^3 + \dots + 8^{2022}) : 146 \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$

### Problema 4

Cei 26 de cavaleri ai Mesei Rotunde și-au numerotat scaunele cu numere de la 1 la 26. Există o aranjare a celor 26 de scaune în jurul Mesei Rotunde, astfel încât suma numerelor inscripționate pe oricare trei scaune vecine să fie număr impar?

Presupunem că există o astfel de aranjare, iar numerele 1,2,3,...,26 sunt rearanjate în jurul Mesei Rotunde, în ordinea  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{26}$ , astfel încât suma numerelor inscripționate pe oricare trei scaune să fie număr impar:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2k_1 + 1 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= 2k_2 + 1 \\ a_3 + a_4 + a_5 &= 2k_3 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{24} + a_{25} + a_{26} &= 2k_{24} + 1 \\ a_{25} + a_{26} + a_1 &= 2k_{25} + 1 \\ a_{26} + a_1 + a_2 &= 2k_{26} + 1 \\ \hline &\dots\dots\dots (+) \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{26}) = 2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{26}) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{26 \text{ de ori}} \Rightarrow$$



---

$$\Rightarrow 3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{26}) = 2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{26}) + 26 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } 3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{26}) = 3 \cdot 26 \cdot 27 : 2 = 13 \cdot 27 \text{ număr impar} \dots\dots\dots 1p$$

Iar  $2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{26}) + 26$  este număr impar, deci contradicție  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  nu există o aranjare a celor 26 de scaune în jurul Mesei Rotunde, astfel încât suma numerelor inscripționate pe oricare trei scaune să fie număr impar  $\dots\dots\dots 2p$